نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: **حد توابع کسری**

سوال ۱

پاسخ: گزینه ۳

$$x \to (-1)^- \Rightarrow x < -1 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x^2 - 1 > 0$$

$$\lim_{x\to(-1)^-} \frac{|x^2-1|}{x+\sqrt{x+2}} = \lim_{x\to(-1)^-} \frac{x^2-1}{x+\sqrt{x+2}} \times \frac{x-\sqrt{x+2}}{x-\sqrt{x+2}}$$

$$= \lim_{x\to(-1)^-} \frac{(x^2-1)(-2)}{x^2-x-2} = \lim_{x\to(-1)^-} \frac{(x-1)(x+1)(-2)}{(x+1)(x-2)} = -\frac{4}{3}$$

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۲

گزینه‌ی «۲»

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{2+[-x]}-\sqrt{\cos x}}{x\tan x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{2-1}-\sqrt{\cos x}}{x(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2} \times \frac{1+\sqrt{\cos x}}{1+\sqrt{\cos x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{2x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^2}{2}}{2x^2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{4}$$

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۳

اگر فرض کنیم $t = x - \frac{\pi}{2}$، خواهیم داشت $t \to 0$ و $x = \frac{\pi}{2} + t$ و در نتیجه:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{8+8\sin x \sin 3x \sin 5x}{(2x-\pi)^2}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{8+8\sin(\frac{\pi}{2}+t)\sin(\frac{3\pi}{2}+3t)\sin(\frac{5\pi}{2}+5t)}{(2(\frac{\pi}{2}+t)-\pi)^2}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{8-8\cos t \cos 3t \cos 5t}{4t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{8-8(1-\frac{1}{2}t^2)(1-\frac{9}{2}t^2)(1-\frac{25}{2}t^2)}{4t^2}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{140t^2-518t^4+225t^6}{4t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{140t^2}{4t^2} = 35$$

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۴

$$\lim_{x\to ۱}\left(\frac{x-a}{x-۱}-\frac{x+b}{x+۱}\right)=\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲+(۱-a)x-a-x^۲+(۱-b)x+b}{(x-۱)(x+۱)}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{(۲-a-b)x+(b-a)}{(x-۱)(x+۱)}=۳$$

چون مخرج به ازای x=۱ صفر می‌شود، صورت نیز باید به ازای x=۱ صفر شود:

$$۲-a-b+b-a=۰\Rightarrow a=۱$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۱}\frac{(۱-b)x+(b-۱)}{(x-۱)(x+۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{(۱-b)(x-۱)}{(x-۱)(x+۱)}=\frac{۱-b}{۲}=۳$$

$$\Rightarrow b=-۵$$

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۲

اگر از سمت راست به $x=۱$ نزدیک شویم در این صورت $x-۱>۰$، پس در نامساوی داده شده مخرج $۱-x<۰$ در نتیجه باید $f(x)-۲>۰$ باشد در نتیجه اگر $x\to ۱^+$ آنگاه $f(x)\to ۲^+$ همچنین اگر از سمت چپ به $x=۱$ نزدیک شویم در این صورت $x-۱<۰$ پس $۱-x>۰$ در نتیجه در نامساوی $\frac{f(x)-۲}{۱-x}<۰$ باید $f(x)-۲<۰$ باشد، یعنی $x\to ۱^-$ آنگاه $f(x)\to ۲^-$. بنابراین گزینه «۲» می‌تواند درست باشد.

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۳

چون حد عبارت مخرج کسر در $x=۲$ برابر با صفر است، حد صورت کسر نیز باید صفر باشد تا به حالت مبهم $\frac{۰}{۰}$ برسیم و پس از رفع ابهام، حاصل حد برابر با عدد حقیقی b شود.

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۴(\sqrt{x+a}-۲)}{x^۲-۵x+۶}=\frac{۴(\sqrt{۲+a}-۲)}{۰}=\frac{۰}{۰}$$

$$۴(\sqrt{۲+a}-۲)=۰\Rightarrow\sqrt{۲+a}=۲\Rightarrow a=۲$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۴(\sqrt{x+۲}-۲)}{x^۲-۵x+۶}=\lim_{x\to ۲}\frac{۴(x+۲-۴)}{(x-۲)(x-۳)(\sqrt{x+۲}+۲)}$$

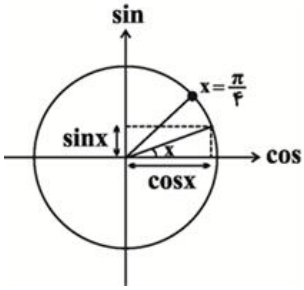
$$=\frac{۴}{(-۱)(۴)}=-۱=b$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^۲+bx-a}{x-a}=\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-x-۲}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}(x+۱)=۳$$

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۱

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\frac{|\sin x-\cos x|}{\tan x-1}=\frac{|\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}|}{1-1}=\frac{0}{0}$$



به دایره مثلثاتی توجه کنید:

$$x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow \sin x=\cos x$$

$$0<x<\frac{\pi}{4}\Rightarrow \sin x<\cos x$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}\frac{|\sin x-\cos x|}{\frac{\sin x}{\cos x}-1}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}-\frac{(\sin x-\cos x)}{\frac{\sin x-\cos x}{\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}^-}-\frac{\cos x(\sin x-\cos x)}{\sin x-\cos x}=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۳

گزینهٔ ۳:

با توجه به نمودار تابع f می‌توان نوشت $\lim_{x\to 3} f(x)=2$، بنابراین:

$$\lim_{x\to 3}\frac{f^3(x)-8}{|f(x)-2|}=\lim_{x\to 3}\frac{f^3(x)-8}{-(f(x)-2)}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(f(x)-2)}(f^2(x)+4+2f(x))}{\cancel{-(f(x)-2)}}=\frac{(2)^2+4+2(2)}{-1}=-12$$

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۲

$$\lim_{x\to ۳} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to ۳} \frac{x^۳+nx^۲+۶x}{x-۳} = L$$

چون مخرج کسر به ازای $x = ۳$ صفر است، برای آن‌که حاصل حد، عدد حقیقی L شود، باید، صورت کسر نیز به‌ازای $x = ۳$ صفر شود:

$$x^۳ + nx^۲ + ۶x \xrightarrow{x=۳} ۲۷ + ۹n + ۱۸ = ۰$$

$$\Rightarrow ۹n = -۴۵ \Rightarrow n = -۵$$

حال حاصل حد را می‌یابیم:

$$L = \lim_{x\to ۳} \frac{x(x^۲-۵x+۶)}{x-۳} = \lim_{x\to ۳} \frac{x(x-۳)(x-۲)}{x-۳}$$

$$= \lim_{x\to ۳}(x^۲ - ۲x) = ۹ - ۶ = ۳ \Rightarrow L = ۳$$

$$\Rightarrow n + L = -۵ + ۳ = -۲$$

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۱

$$\sqrt{۱ - \cos^۲ x} = \sqrt{\sin^۲ x} = |\sin x|$$

$x \to \pi^+ \Rightarrow$ ربع سوم $\Rightarrow \sin x < ۰ \Rightarrow |\sin x| = -\sin x$

$$\lim_{x\to \pi^+} \frac{[x]|\sin x|}{۲ \sin x \cos x}$$

$$= \lim_{x\to \pi^+} \frac{[x](-\sin x)}{۲ \sin x \cos x} = \lim_{x\to \pi^+} \frac{-[x]}{۲ \cos x} = \frac{-[\pi^+]}{۲(-۱)} = \frac{-۳}{-۲} = \frac{۳}{۲}$$